

MÔ HÌNH CỐ ĐỊNH, NGẪU NHIÊN VÀ HỖN HỢP TRONG PHÂN TÍCH PHƯƠNG SAI

Use of fixed, random and mixed models in analysis of variance

Nguyễn Đình Hiền¹

SUMMARY

In experimental designs there are three models for analysis of variance: fixed, random and mixed models. The present paper described in detail model with one and two factors. The model, the hypothesis and the testing of hypothesis of frequently used designs such as one factor completely randomised design, two factors crossed design, hierarchical design and split plot design were presented.

Keywords: Analysis of variance, fixed, random, mixed models.

Trong các giáo trình phương pháp thí nghiệm và toán sinh học trước đây khi phân tích phương sai các nhân tố thường được coi là **cố định**. Việc phân tích và kết luận được trình bày theo các mẫu định sẵn đã quen thuộc với cán bộ giảng dạy và sinh viên trong trường.

Trong những năm gần đây, do đòi hỏi của thực tế và cũng do những tiến bộ của việc nghiên cứu và phân tích các thiết kế thí nghiệm, các nhân tố có thể cố định hay ngẫu nhiên và mô hình phân tích phương sai được sắp thành 3 loại: **Cố định** (Fixed - nếu tất cả các nhân tố đều cố định), **ngẫu nhiên** (Random - nếu tất cả các nhân tố đều ngẫu nhiên) và **hỗn hợp** (Mixed - nếu có một số nhân tố cố định, một số ngẫu nhiên). Việc quyết định xem nhân tố cố định hay ngẫu nhiên phải làm trước khi bố trí thí nghiệm và căn cứ vào bản chất của nhân tố cũng như ảnh hưởng của kết luận khi ứng dụng trong thực tế.

Bài này nhằm giới thiệu cách nhìn đầy đủ hơn về phân tích phương sai. Bài sau sẽ giới thiệu các cách so sánh các trung bình sau khi phân tích phương sai như cách so sánh theo LSD, Duncan, Student-Newman-Keuls, Tukey, Dunnett, Scheffé . . .

Sau đây là một số mô hình thường dùng trong phân tích phương sai.

1. Phân tích phương sai một nhân tố

Mô hình một nhân tố có a mức, mỗi mức lặp lại r_i lần

$$x_{ij} = \mu + a_i + e_{ij} \quad (i = 1, a; j = 1, r_i)$$

μ là trung bình chung

a_i là tác động của mức A_i

e_{ij} là sai số ngẫu nhiên giả thiết độc lập, phân phối chuẩn $N(0, \sigma^2_e)$

Nếu nhân tố A cố định thì mô hình gọi là mô hình cố định, các a_i là hằng số thoả mãn điều kiện

$$\sum_{i=1}^a a_i = 0$$

¹ Bộ môn Tin học, Khoa Sư phạm kỹ thuật

MÔ HÌNH CỐ ĐỊNH, NGẪU NHIÊN VÀ HỖN HỢP ...

Nếu nhân tố A ngẫu nhiên thì mô hình gọi là mô hình ngẫu nhiên, các a_i là các giá trị của biến ngẫu nhiên phân phối chuẩn $N(0, \sigma_a^2)$

Phương pháp phân tích

Cả hai mô hình đều chung cách phân tích mà nội dung gồm:

- a- Tách tổng bình phương toàn bộ SSTO thành hai phần: tổng bình phương do nhân tố SSA và tổng bình phương do sai số SSE
- b- Tách bậc tự do của tổng bình phương toàn bộ dfTO thành hai phần: bậc tự do dfA của tổng bình phương SSA và bậc tự do dfE của tổng bình phương SSE
- c- Chia tổng bình phương cho bậc tự do được bình phương trung bình msA, msE
- d- Tóm tắt toàn bộ cách phân tích vào trong bảng: $n = \sum r_i$

Bảng phân tích phương sai (ANOVA)

Nguồn biến động	Bậc tự do	Tổng bình phương	Bình phương trung bình	F_m	Kỳ vọng
Nhân tố	a - 1 dfA	SSA	msA = SSA/dfA	$\frac{msA}{msE}$	
Sai số	n - a dfE	SSE	msE = SSE/dfE		σ_c^2
Toàn bộ	n - 1	SSTO			

Cách kiểm định giả thiết

Tùy theo mô hình có thể tính các kỳ vọng của msA và msE. Từ đó có cách tính tỷ số F_m và cách kiểm định giả thiết đối với nhân tố A.

Mô hình cố định

Giả thiết H_0 : “các a_i bằng không”, đối thiết: “có a_i khác không”.

Kỳ vọng của msE bằng σ_c^2 , còn kỳ vọng của msA bằng $\sigma_c^2 + \Phi_A$

$$\text{Trong đó } \Phi_A = \frac{\sum_{i=1}^a r_i a_i^2}{(a-1)} \text{ nếu mọi } r_i \text{ đều bằng } r \text{ thì } \Phi_A = \frac{r \sum_{i=1}^a a_i^2}{a-1}$$

Nếu giả thiết H_0 đúng thì tỷ số $F_m = msA/msE$ phân phối Fisher Snedecor với a-1 và n-a bậc tự do và ta có quy tắc kiểm định:

Tìm giá trị tới hạn $F(\alpha, a-1, n-a)$.

Nếu $F_m \leq F(\alpha, a-1, n-a)$ thì chấp nhận H_0 , nếu ngược lại thì chấp nhận H_1 .

Mô hình ngẫu nhiên

Giả thiết H_0 : “ σ_A^2 bằng không”, đối thiết: “ σ_A^2 khác không”.

Kỳ vọng của msE bằng σ_c^2 , còn kỳ vọng của msA bằng $\sigma_c^2 + r' \sigma_A^2$

$$\text{với } r' = \frac{N^2 - \sum_{i=1}^k r_i^2}{(a-1)N} \text{ nếu mọi } r_i \text{ đều bằng } r \text{ thì } r' = r$$

Nếu giả thiết H_0 đúng thì tỷ số $F_m = msA/msE$ phân phối Fisor Snêđêco với $a-1$ và $n-a$ bậc tự do và ta có quy tắc kiểm định:

Tìm giá trị tới hạn $F(\alpha, a-1, n-a)$.

Nếu $F_m \leq F(\alpha, a-1, n-a)$ thì chấp nhận H_0 , nếu ngược lại thì chấp nhận H_1

σ_c^2 được ước lượng bằng msE

Nếu $msA > msE$ thì σ_A^2 được ước lượng bằng $(msA - msE) / r'$

2- Phân tích phương sai hai nhân tố chéo nhau (crossed)

Mô hình hai nhân tố chéo nhau (hay trực giao)

Nhân tố A có a mức, nhân tố B có b mức, mỗi công thức (a_i, b_j) lặp lại r lần

$$x_{ijk} = \mu + a_i + b_j + ab_{ij} + e_{ijk} \quad (i = 1, a; j = 1, b; k = 1, r)$$

μ là trung bình chung

a_i là tác động của mức A_i của nhân tố A

b_j là tác động của mức B_j của nhân tố B

$(ab)_{ij}$ là tương tác giữa 2 mức A_i và B_j của hai nhân tố A, B

e_{ijk} là sai số ngẫu nhiên giả thiết độc lập, phân phối chuẩn $N(0, \sigma_c^2)$.

Nếu các mức A_i và B_j cố định thì mô hình gọi là mô hình cố định, các a_i và b_j là hằng số thoả mãn điều kiện

$$\sum_{i=1}^a a_i = 0 \quad \sum_{j=1}^b b_j = 0 \quad \sum_{i=1}^a ab_{ij} = 0 \quad \sum_{j=1}^b ab_{ij} = 0$$

Nếu cả 2 mức A_i và B_j ngẫu nhiên thì mô hình gọi là mô hình ngẫu nhiên, các a_i là các giá trị của biến ngẫu nhiên phân phối chuẩn $N(0, \sigma_a^2)$, các b_j là các giá trị của biến ngẫu nhiên phân phối chuẩn $N(0, \sigma_b^2)$ còn $(ab)_{ij}$ là các giá trị của biến ngẫu nhiên phân phối chuẩn $N(0, \sigma_{ab}^2)$

Nếu một trong 2 nhân tố cố định, nhân tố kia ngẫu nhiên thì có mô hình hỗn hợp.

Phương pháp phân tích

Cả ba mô hình đều chung cách phân tích mà nội dung gồm:

a-Tách tổng bình phương toàn bộ SSTO thành bốn phần: tổng bình phương do nhân tố A (SSA), tổng bình phương do nhân tố B (SSB), tổng bình phương do tương tác SS(AB) và tổng bình phương do sai số SSE

b-Tách bậc tự do của tổng bình phương toàn bộ dfTO thành bốn phần: bậc tự do dfA của tổng bình phương SSA, bậc tự do dfB của tổng bình phương SSB, bậc tự do dfAB của tổng bình phương SSAB và bậc tự do dfE của tổng bình phương SSE

c- Chia tổng bình phương cho bậc tự do được bình phương trung bình

msA , msB , $msAB$ và msE

d-Tóm tắt toàn bộ cách phân tích vào trong bảng :

MÔ HÌNH CỐ ĐỊNH, NGẪU NHIÊN VÀ HỖN HỢP ...

Bảng phân tích phương sai

Nguồn biến động	Bậc tự do	Tổng bình phương	Bình phương trung bình	F_{in}	Kỳ vọng
Nhân tố A	$df_A = a - 1$	SSA	msA	F_{inA}	
Nhân tố B	$df_B = b - 1$	SSB	msB	F_{inB}	
Tương tác	$Df_{AB} = (a-1)(b-1)$	SSAB	msAB	F_{inAB}	
Sai số	$df_E = ab(r-1)$	SSE	msE		σ_c^2
Toàn bộ	$abr - 1$	SSTO			

Cách kiểm định giả thiết

Tuỳ theo mô hình có thể tính các kỳ vọng của msA, msB, msAB và msE. Từ đó có cách tính tỷ số F_{in} và cách kiểm định các giả thiết đối với nhân tố A, nhân tố B và tương tác AB.

Mô hình cố định

Giả thiết H_{0A} : Các a_i bằng không, đối thiết H_{1A} : có a_i khác không

Giả thiết H_{0B} : Các b_j bằng không, đối thiết H_{1B} : có b_j khác không

Giả thiết H_{0AB} : Các ab_{ij} bằng không, đối thiết H_{1AB} : có ab_{ij} khác không

Kỳ vọng	Kiểm định giả thiết
$E(msA) = \sigma_c^2 + (br\sum a_i^2)/(a-1)$	$F_{inA} = msA/msE$ so với $F(\alpha, df_A, df_E)$
$E(msB) = \sigma_c^2 + (ar\sum b_j^2)/(b-1)$	$F_{inB} = msB/msE$ so với $F(\alpha, df_B, df_E)$
$E(msAB) = \sigma_c^2 + (r\sum ab_{ij}^2) / (a-1)(b-1)$	$F_{inAB} = msAB/msE$ so với $F(\alpha, df_{AB}, df_E)$
$E(msE) = \sigma_c^2$	

Mô hình ngẫu nhiên

Giả thiết H_{0A} : σ_A^2 bằng không, đối thiết H_{1A} : σ_A^2 khác không

Giả thiết H_{0B} : σ_B^2 bằng không, đối thiết H_{1B} : σ_B^2 khác không

Giả thiết H_{0AB} : σ_{AB}^2 bằng không, đối thiết H_{1AB} : σ_{AB}^2 khác không

Kỳ vọng	Kiểm định giả thiết
$E(msA) = \sigma_c^2 + r\sigma_{AB}^2 + br\sigma_A^2$	$F_{inA} = msA/msAB$ so với $F(\alpha, df_A, df_{AB})$
$E(msB) = \sigma_c^2 + r\sigma_{AB}^2 + ar\sigma_B^2$	$F_{inB} = msB/msAB$ so với $F(\alpha, df_B, df_{AB})$
$E(msAB) = \sigma_c^2 + r\sigma_{AB}^2$	$F_{inAB} = msAB/msE$ so với $F(\alpha, df_{AB}, df_E)$
$E(msE) = \sigma_c^2$	

Có thể ước lượng các phương sai như sau:

σ_c^2 ước lượng bằng msE

σ_{AB}^2 ước lượng bằng $(msAB - msE) / r$

σ_B^2 ước lượng bằng $(msB - msAB) / ar$

σ_A^2 ước lượng bằng $(msA - msAB) / br$

Mô hình hỗn hợp

Giả sử nhân tố A cố định, nhân tố B ngẫu nhiên (kéo theo AB ngẫu nhiên)

Giả thiết H_{0A} : Các a_i bằng không, đối thiết H_{1A} : có a_i khác không

Giả thiết H_{0B} : σ_B^2 bằng không, đối thiết H_{1B} : σ_B^2 khác không
 Giả thiết H_{0AB} : σ_{AB}^2 bằng không, đối thiết H_{1AB} : σ_{AB}^2 khác không

Kỳ vọng	Kiểm định giả thiết
$E(msA) = \sigma_c^2 + r\sigma_{AB}^2 + (br\Sigma a_i^2)/(a-1)$	$F_{inA} = msA/msAB$ so với $F(\alpha, dfA, dfAB)$
$E(msB) = \sigma_c^2 + ar\sigma_B^2$	$F_{inB} = msB/msE$ so với $F(\alpha, dfB, dfE)$
$E(msAB) = \sigma_c^2 + r\sigma_{AB}^2$	$F_{inAB} = msAB/msE$ so với $F(\alpha, dfAB, dfE)$
$E(msE) = \sigma_c^2$	

3- Phân tích phương sai hai nhân tố phân cấp (Hierarchical)

Mô hình hai nhân tố phân cấp (hay còn gọi là chia ổ nested)

Nhân tố A là cấp trên có a mức, nhân tố B là cấp dưới có b mức, mỗi công thức (a_i, b_j) lặp lại r lần

$$x_{ijk} = \mu + a_i + b_{j(i)} + e_{ijk} \quad (i = 1, a; j = 1, b; k = 1, r)$$

μ là trung bình chung

a_i là tác động của mức A_i của nhân tố A

$b_{j(i)}$ là tác động của mức B_j (dưới mức i của nhân tố A) của nhân tố B

e_{ijk} là sai số ngẫu nhiên giả thiết độc lập, phân phối chuẩn $N(0, \sigma_c^2)$.

Nếu các mức A_i và B_j ngẫu nhiên thì mô hình gọi là mô hình ngẫu nhiên, nếu A cố định B ngẫu nhiên thì có mô hình hỗn hợp.

$$\sum_{i=1}^a a_i = 0$$

Trong mô hình ngẫu nhiên nhân tố A ngẫu nhiên, các a_i là các giá trị của biến chuẩn $N(0, \sigma_A^2)$. Nhân tố B ngẫu nhiên, các b_j trong cùng một mức i của nhân tố A là các giá trị của biến chuẩn $N(0, \sigma_B^2)$.

Trong mô hình hỗn hợp nhân tố A cố định, các a_i thỏa mãn điều kiện

Nhân tố B ngẫu nhiên, các b_j trong cùng một mức i của nhân tố A là các giá trị của biến chuẩn $N(0, \sigma_B^2)$.

Phương pháp phân tích

Cả hai mô hình đều chung cách phân tích mà nội dung gồm:

a-Tách tổng bình phương toàn bộ SSTO thành ba phần: tổng bình phương do nhân tố A SSA, tổng bình phương do nhân tố B trong A SSB(A) và tổng bình phương do sai số SSE.

b-Tách bậc tự do của tổng bình phương toàn bộ dfTO thành ba phần: bậc tự do dfA của tổng bình phương SSA, bậc tự do dfB(A) của tổng bình phương SSB(A) và bậc tự do dfE của tổng bình phương SSE

c- Chia tổng bình phương cho bậc tự do được bình phương trung bình msA, msB và msE

Tóm tắt toàn bộ cách phân tích vào trong bảng:

MÔ HÌNH CỐ ĐỊNH, NGẪU NHIÊN VÀ HỖN HỢP ...

Nguồn	Bậc tự do	Tổng bình	Bình phương	F _{in}	Kỳ
Nhân tố A	dfA = a-1	SSA	msA	F _{inA}	
Nhân tố B	dfB(A) = a(b-1)	SSB(A)	msB(A)	F _{inB}	
Sai số	dfE = ab(r-1)	SSE	msE		
Toàn bộ	dfTO = abr-1	SSTO			σ _e ²

Cách kiểm định giả thiết

Mô hình ngẫu nhiên

Giả thiết H_{0A}: σ_A² bằng không, đối thiết H_{1A}: σ_A² khác không

Giả thiết H_{0B}: σ_B² bằng không, đối thiết H_{1B}: σ_B² khác không

Kỳ vọng	Kiểm định giả thiết
E (msA) = σ _e ² + rσ _B ² + brσ _A ²	F _{inA} = msA / msB (A) so với F(α, dfA, dfB(A))
E (msB(A)) = σ _e ² + rσ _B ²	F _{inB} = msB (A) / msE so với F(α, dfB(A), dfE)
E (msE) = σ _e ²	

Ước lượng các phương sai:

σ_e² được ước lượng bằng msE

σ_B² được ước lượng bằng (msB (A) - msE) / r

σ_A² được ước lượng bằng (msA - msB (A)) / br

Mô hình hỗn hợp

Giả thiết H_{0A}: các a_i bằng không, đối thiết H_{1A}: có a_i khác không

Giả thiết H_{0B}: σ_B² bằng không, đối thiết H_{1B}: σ_B² khác không

Kỳ vọng	Kiểm định giả thiết
E(msA) = σ _e ² + rσ _B ² + Φ _A	F _{inA} = msA / msB(A) so với F(α, dfA, dfB(A))
E(msB) = σ _e ² + rσ _B ²	F _{inB} = msB(A) / msE so với F(α, dfB(A), dfE)
E(msE) = σ _e ²	

$$\text{với } \Phi_A = \frac{br \sum_{i=1}^a a_i^2}{a-1}$$

Có thể ước lượng các phương sai:

σ_e² được ước lượng bằng msE

σ_B² được ước lượng bằng (msB - msE) / r

4- Phân tích phương sai hai nhân tố chia ô (Split plot)

Mô hình hai nhân tố chia ô

Trong bố trí thí nghiệm chia ô lớn, ô nhỏ (Split plot) nhân tố A bố trí trên ô lớn, nhân tố B bố trí trên ô nhỏ, mỗi lần lặp là một khối (Block)

$$x_{ijk} = \mu + c_k + a_i + cd_{ik} + bj + ab_{ij} + e_{ijk} \quad (i = 1, a; j = 1, b; k = 1, r)$$

μ là trung bình chung

c_k là tác động của khối k

a_i là tác động của mức A_i của nhân tố A

cd_{ik} là tương tác giữa khối và nhân tố A

b_j là tác động của mức B_j của nhân tố B

ab_{ij} là tác động của tương tác AB

e_{ijk} là sai số ngẫu nhiên giả thiết độc lập, phân phối chuẩn $N(0, \sigma^2_e)$.

Khối thường được coi là nhân tố ngẫu nhiên: Các c_k phân phối chuẩn $N(0, \sigma^2_K)$ còn A và B thì có thể cố định hoặc ngẫu nhiên, nếu A cố định thì thỏa mãn điều kiện $\sum a_i = 0$ (B cố định thì $\sum b_j = 0$) còn nếu A ngẫu nhiên thì các giá trị a_i phân phối chuẩn $n(0, \sigma^2_A)$ (B ngẫu nhiên thì b_j phân phối chuẩn $n(0, \sigma^2_B)$).

Thường lấy tương tác A x K làm sai số ô lớn và bỏ qua tương tác BK.

Tuỳ giả thiết hai nhân tố cố định hay ngẫu nhiên hay hỗn hợp mà có cách kiểm định khác nhau.

Phương pháp phân tích

Các mô hình đều chung cách phân tích mà nội dung gồm:

a-Tách tổng bình phương toàn bộ SSTO thành sáu phần: tổng bình phương do khối SSK, tổng bình phương do nhân tố A (SSA), tổng bình phương do nhân tố B (SSB), tổng bình phương do tương tác AK (SSAK), tổng bình phương do tương tác AB (SSAB), và tổng bình phương do sai số SSE.

b-Tách bậc tự do của tổng bình phương toàn bộ dfTO thành sáu phần: bậc tự do dfK của tổng bình phương SSK, bậc tự do dfA của tổng bình phương SSA, bậc tự do dfAK của tổng bình phương SSAK, bậc tự do dfB của tổng bình phương SSB, bậc tự do dfAB của tổng bình phương SSAB và bậc tự do dfE của tổng bình phương SSE

c- Chia tổng bình phương cho bậc tự do được bình phương trung bình msK, msA, msAK, msB, msAB và msE

d- Tóm tắt kết quả vào bảng phân tích phương sai

Bảng phân tích phương sai

Nguồn biến động	Bậc tự do	Tổng bình phương	Bình phương trung bình	F_{in}	Kỳ vọng
Khối	dfK = r-1	SSK	msK		
Nhân tố A	dfA = a-1	SSA	msA	F_{inA}	
Tương tác AK Sai số ô lớn	dfAK=(a-1)(r-1)	SSAK	msAK		
Nhân tố B	dfB = b-1	SSB	msB	F_{inB}	
Tương tác AB	dfAB= (a-1)(b-1)	SSAB	msAB	m_{AB}	
Sai số ô nhỏ	dfE = a(b-1)(r-1)	SSE	msE		σ^2_e
Toàn bộ	abr -1	SSTO			

MÔ HÌNH CỐ ĐỊNH, NGẪU NHIÊN VÀ HỖN HỢP ...

Cách kiểm định giả thiết

Mô hình cố định

Giả thiết H_{0A} : Các a_i bằng không, đối thiết H_{1A} : có a_i khác không

Giả thiết H_{0B} : Các b_j bằng không, đối thiết H_{1B} : có b_j khác không

Giả thiết H_{0AB} : Các ab_{ij} bằng không, đối thiết H_{1AB} : có ab_{ij} khác không

Kỳ vọng	Kiểm định giả thiết
Ồ lớn	
$E(msK) = \sigma_c^2 + ab\sigma_K^2$ $E(msA) = \sigma_c^2 + b\sigma_{AK}^2 + (br\Sigma a_i^2)/(a-1)$ $E(msAK) = \sigma_c^2 + b\sigma_{AK}^2$	$F_{inA} = msA/msAK$ so với $F(\alpha, dfA, dfAK)$
Ồ nhỏ	
$E(msB) = \sigma_c^2 + (ar\Sigma b_j^2)/(b-1)$ $E(msAB) = \sigma_c^2 + (r\Sigma ab_{ij}^2)/(a-1)(b-1)$ $E(msE) = \sigma_c^2$	$F_{inB} = msB/msE$ so với $F(\alpha, dfB, dfE)$ $F_{inAB} = msAB/msE$ so với $F(\alpha, dfAB, dfE)$

Mô hình ngẫu nhiên: nhân tố A và nhân tố B ngẫu nhiên

Giả thiết H_{0A} : σ_A^2 bằng không, đối thiết H_{1A} : σ_A^2 khác không

Giả thiết H_{0B} : σ_B^2 bằng không, đối thiết H_{1B} : σ_B^2 khác không

Giả thiết H_{0AB} : σ_{AB}^2 bằng không, đối thiết H_{1AB} : σ_{AB}^2 khác không

Kỳ vọng	Kiểm định giả thiết
Ồ lớn	
$E(msK) = \sigma_c^2 + b\sigma_{AK}^2 + ab\sigma_K^2$ $E(msA) = \sigma_c^2 + b\sigma_{AK}^2 + r\sigma_{AB}^2 + br\sigma_A^2$ $E(msAK) = \sigma_c^2 + b\sigma_{AK}^2$	Không có kiểm định chính xác (Có thể dùng kiểm định gần đúng)
Ồ nhỏ	
$E(msB) = \sigma_c^2 + r\sigma_{AB}^2 + ar\sigma_B^2$ $E(msAB) = \sigma_c^2 + r\sigma_{AB}^2$ $E(msE) = \sigma_c^2$	$F_{inB} = msB/msAB$ so với $F(\alpha, dfB, dfAB)$ $F_{inAB} = msAB/msE$ so với $F(\alpha, dfAB, dfE)$

Mô hình hỗn hợp: nhân tố A cố định, nhân tố B ngẫu nhiên

Giả thiết H_{0A} : mọi a_i bằng không, đối thiết H_{1A} : có a_i khác không

Giả thiết H_{0B} : σ_B^2 bằng không, đối thiết H_{1B} : σ_B^2 khác không

Giả thiết H_{0AB} : σ_{AB}^2 bằng không, đối thiết H_{1AB} : σ_{AB}^2 khác không

Nguyễn Đình Hiền

Kỳ vọng	Kiểm định giả thiết
ô lớn	
$E(msK) = \sigma_c^2 + ab\sigma_K^2$ $E(msA) = \sigma_c^2 + b\sigma_{AK}^2 + r\sigma_{AB}^2 + (br\Sigma a^2_i) / (a-1)$ $E(msAK) = \sigma_c^2 + b\sigma_{AK}^2$	Không có kiểm định chính xác (Có thể dùng kiểm định gần đúng)
ô nhỏ	
$E(msB) = \sigma_c^2 + ar\sigma_B^2$ $E(msAB) = \sigma_c^2 + r\sigma_{AB}^2$ $E(msE) = \sigma_c^2$	$F_{inB} = msB/msE$ so với $F(\alpha, dfB, dfE)$ $F_{inAB} = msAB/msE$ so với $F(\alpha, dfAB, dfE)$

Mô hình hỗn hợp: nhân tố A ngẫu nhiên, nhân tố B cố định

Giả thiết H_{0A} : σ_A^2 bằng không, đối thiết H_{1A} : σ_A^2 khác không

Giả thiết H_{0B} : các b_j bằng không, đối thiết H_{1B} : có b_j khác không

Giả thiết H_{0AB} : σ_{AB}^2 bằng không, đối thiết H_{1AB} : σ_{AB}^2 khác không

Kỳ vọng	Kiểm định giả thiết
ô lớn	
$E(msK) = \sigma_c^2 + b\sigma_{AK}^2 + ab\sigma_K^2$ $E(msA) = \sigma_c^2 + b\sigma_{AK}^2 + br\sigma_A^2$ $E(msAK) = \sigma_c^2 + b\sigma_{AK}^2$	$F_{inA} = msA / msAK$ so với $F(\alpha, dfA, dfAK)$
ô nhỏ	
$E(msB) = \sigma_c^2 + r\sigma_{AB}^2 + (ar\Sigma b^2_j) / (b-1)$ $E(msAB) = \sigma_c^2 + r\sigma_{AB}^2$ $E(msE) = \sigma_c^2$	$F_{inB} = msB/msAB$ so với $F(\alpha, dfB, dfAB)$ $F_{inAB} = msAB/msE$ so với $F(\alpha, dfAB, dfE)$

Các mô hình một nhân tố khối ngẫu nhiên đầy đủ (RCBD) hay ô vuông La tinh chủ yếu dùng với nhân tố cố định và cách phân tích không khác gì cách trình bày trong các giáo trình về phương pháp thí nghiệm và toán sinh học hiện đang dùng.

Đối với mô hình 3 nhân tố thì việc phân tích phức tạp hơn và có thể tập trung vào mô hình 3 nhân tố chéo nhau (cross), phân cấp (hierarchical) hay chia ô lớn, ô vừa, ô nhỏ (split split plot). Mô hình cố định hay ngẫu nhiên không phức tạp nhưng mô hình hỗn hợp thì phức tạp hơn nhiều.

Trong các bộ chương trình chuyên về thống kê như Minitab, SPSS, Statistica, Irristat Ver 4.0 đối với mỗi nhân tố phải khai báo rõ cố định hay ngẫu nhiên, chéo nhau hay phân cấp để chương trình xử lý và đưa ra kết luận. Một số trường hợp không có kiểm định F chính xác phải dùng các kiểm định F trong đó mẫu số là tổ hợp một số các bình phương trung bình.